GAUSSOVA ELIMINAČNÍ METODA

Frobeniova věta:

Soustava $A \cdot X = B$

1) má řešení $\Leftrightarrow$ $h(A) = h(A_r) = h$
   a) $n = h$ ... právě jedno řešení
   b) $n > h$ ... nekonečně mnoho řešení $\to$ $n-h$ parametrů
2) nemá řešení $\Leftrightarrow$ $h(A) \neq h(A_r)$, tj. $h(A_r) = h(A) + 1$

Př: Gaussovou eliminační metodou řešte soustavy lineárních rovnic. Pomocí Frobeniovy věty zdůvodněte existenci a počet řešení.

1)
$$\begin{aligned} x + y - 2z &= -1 \\ 3x + 2y + z &= 0 \\ 2x + 3y + z &= 7 \\ 2x + y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

Postup:
1. Rozšířenou matici soustavy převedeme pomocí elementárních řádkových úprav na schodovitý tvar.
2. Poslední matice (ve schodovitém tvaru) odpovídá nové jednodušší soustavě, která má stejné řešení jako zadaná soustava.
3. Z nové soustavy již jednoduše zpětným výpočtem určíme řešení.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} /\cdot(-3) \quad /\cdot(-2) \\ + \\ + \\ + \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & -1 & 7 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ /\cdot(-1) \\ + \\ + \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 12 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ /\cdot(-1) \\ /:12 \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x + y - 2z = -1 \\ \Rightarrow y - 7z = -3 \\ \Rightarrow z = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow x = -1 - y + 2z = -1 - 4 + 2 \cdot 1 = -3 \\ \Rightarrow y = -3 + 7z = -3 + 7 \cdot 1 = 4 \end{array}$$

Řešení můžeme napsat ve tvaru:

$K = \{(-3, 4, 1)\}$ ... K je množina řešení
(V dalších příkladech budeme zapisovat řešení jen tímto způsobem.)

nebo

$X = (-3, 4, 1)$

Existence a počet řešení:

$$\left.\begin{array}{l} h(A) = h(A_r) = 3 = h \\ n = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow n = h \Rightarrow \text{soustava má právě jedno řešení}$$

2) $6x + 5y + 4z = 3$
$2x + y - z = -2$
$2x + 3y + 6z = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 6 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ /\cdot(-3) \\ /\cdot(-1) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 7 & 9 \\ 0 & 2 & 7 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ /\cdot(-1) \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} h(A) = 2 \\ h(A_r) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow h(A) \neq h(A_r) \Rightarrow \text{soustava nemá řešení}$$

$K = \emptyset$

3) $2x + 3y + z = 1$
$x + 4y - 2z = 3$
$x + 3y - z = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} /\cdot(-1) \quad /\cdot(-2) \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ /:3 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x + 3y - z = 2 \\ \Rightarrow \quad y - z = 1 \\ \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} h(A) = h(A_r) = 2 = h \\ n = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow n > h \Rightarrow$$ soustava má nekonečně mnoho řešení
$n - h = 3 - 2 = 1$ ... jednu neznámou volíme jako parametr

Za parametr můžeme zvolit neznámou y nebo neznámou z.

I. zp.: $x + 3y - z = 2 \Rightarrow x = 2 - 3y + z = 2 - 3(1+t) + t = 2 - 3 - 3t + t = -1 - 2t$
$y - z = 1 \Rightarrow y = 1 + z = 1 + t$
$z = t$

$K = \{(-1-2t, 1+t, t);\ t \in \mathbb{R}\}$

II. zp.: $x + 3y - z = 2 \Rightarrow x = 2 - 3y + z = 2 - 3s + s - 1 = 1 - 2s$
$y - z = 1 \Rightarrow z = y - 1 = s - 1$
$y = s$

$K = \{(1-2s, s, s-1);\ s \in \mathbb{R}\}$

Pozn: Stačí uvést jeden tvar řešení.

4) $x+y+z+v=5$
$x-y+z-v=-1$
$x+y-z+v=3$
$x-y-z-v=-3$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right) /\cdot(-1) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ /:(-2) \\ /:(-2) \\ /:(-2) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) /\cdot(-1) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) /\cdot(-1) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x+y+z+v=5 \\ \Rightarrow \quad y+v=3 \\ \Rightarrow \quad z=1 \end{array}$$

$h(A)=h(A_r)=3=h$
$n=4$
$\Rightarrow n>h \Rightarrow$ soustava má nekonečně mnoho řešení
$n-h=4-3=1$ ... jednu neznámou volíme jako parametr

Za parametr můžeme zvolit neznámou y nebo neznámou v;
zvolíme např.: $y=t$.

$x+y+z+v=5 \Rightarrow x=5-y-z-v=5-t-1-(3-t)=5-t-1-3+t=1$
$y+v=3 \Rightarrow v=3-y=3-t$
$z=1$
$y=t$

$K=\{(1,t,1,3-t);\ t\in\mathbb{R}\}$

5) $x+y+z-v=2$
$x+y=1$
$2x+2y-z+v=1$
$6x+6y+z-v=7$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 6 & 6 & 1 & -1 & 7 \end{array}\right) /\cdot(-1) \ /\cdot(-2) \ /\cdot(-6) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & -5 \end{array}\right) /:3 \ \ /:5 \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x+y+z-v=2 \\ \Rightarrow \quad z-v=1 \end{array}$$

$h(A)=h(A_r)=2=h$
$n=4$
$\Rightarrow n>h \Rightarrow$ soustava má nekonečně mnoho řešení
$n-h=4-2=2$ ... dvě neznámé volíme jako parametry

Za jeden parametr můžeme zvolit neznámou z nebo neznámou v,
za druhý parametr můžeme zvolit neznámou x nebo neznámou y;
zvolíme např.: $x=t$, $v=s$.

$$\begin{aligned} x + y + z - v &= 2 \quad \Rightarrow \quad y = 2 - x - z + v = 2 - t - (1+s) + s = 2 - t - 1 - s + s = 1 - t \\ z - v &= 1 \quad \Rightarrow \quad z = 1 + v = 1 + s \\ x &= t \\ v &= s \end{aligned}$$

$K = \{(t, 1-t, 1+s, s);\ t, s \in \mathbb{R}\}$

6) $x + 2y + z - v = 0$
$2x + 3y - z + 2v = 0$
$4x + 7y + z = 0$

Homogenní soustava rovnic $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ stačí upravit na schodovitý tvar jen matici soustavy

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} /\cdot(-2) \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \\ /\cdot(-2) \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} /\cdot(-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \end{matrix}$$

$\Rightarrow \quad x + 2y + z - v = 0$
$\Rightarrow \quad y + 3z - 4v = 0 \quad (*)$

Homogenní soustava má vždy řešení (vždy platí $h(A) = h(A_r)$).
$\left.\begin{matrix} h(A) = 2 \\ n = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow n > h(A) \Rightarrow$ soustava má nekonečně mnoho řešení
$n - h(A) = 4 - 2 = 2$ ... dvě neznámé volíme jako parametry

Za parametry můžeme zvolit dvě neznámé z trojice y, z, v;
zvolíme např.: $z = t,\ v = s$ ... nejvýhodnější volba, z rovnice $(*)$ se nejjednodušeji vyjádří neznámá y.

$$\begin{aligned} x + 2y + z - v &= 0 \quad \Rightarrow \quad x = v - z - 2y = s - t - 2\cdot(4s - 3t) = s - t - 8s + 6t = 5t - 7s \\ y + 3z - 4v &= 0 \quad \Rightarrow \quad y = 4v - 3z = 4s - 3t \\ z &= t \\ v &= s \end{aligned}$$

$K = \{(5t - 7s,\ 4s - 3t,\ t,\ s);\ t, s \in \mathbb{R}\}$